

# Теорема Пифагора

Мы готовы вывести важнейшую теорему геометрии — теорему Пифагора. С помощью теоремы Пифагора выполняются многие геометрические вычисления.

## Косинус угла

Прежде всего нам понадобится понятие косинуса острого угла. Пусть  $\alpha$  — острый угол прямоугольного треугольника (рис. 1).

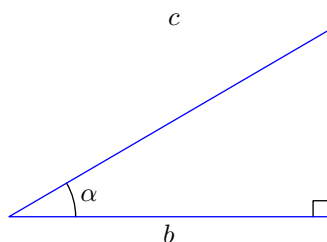


Рис. 1.  $\cos \alpha = b/c$

*Косинус* угла  $\alpha$  — это отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

Замечательно то, что косинус угла  $\alpha$  не зависит от конкретного прямоугольного треугольника (с острым углом  $\alpha$ ) и определяется лишь самой величиной  $\alpha$ . В таких случаях говорят, что определение *корректно*. Докажем корректность определения косинуса.

*Доказательство корректности.* Рассмотрим два прямоугольных треугольника, каждый с острым углом  $\alpha$ . Совместим их так, как показано на рис. 2.

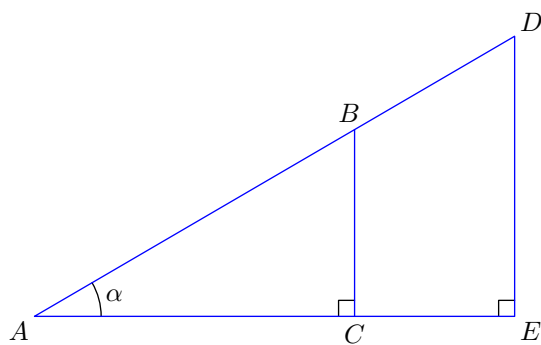


Рис. 2. К доказательству корректности

По теореме о пропорциональных отрезках имеем:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD},$$

откуда

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}.$$

Как видим, в треугольниках  $ABC$  и  $ADE$  отношение прилежащего катета к гипотенузе одно и то же. Следовательно, величина  $\cos \alpha$  не зависит от выбранного треугольника, так что косинус угла определено корректно.

## Теорема Пифагора

Введённое понятие косинуса угла позволяет доказать теорему Пифагора.

**ТЕОРЕМА ПИФАГОРА.** В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим прямоугольный треугольник  $ABC$  с катетами  $BC = a$ ,  $AC = b$  и гипотенузой  $AB = c$ . Проведём высоту  $CH$  (рис. 3).

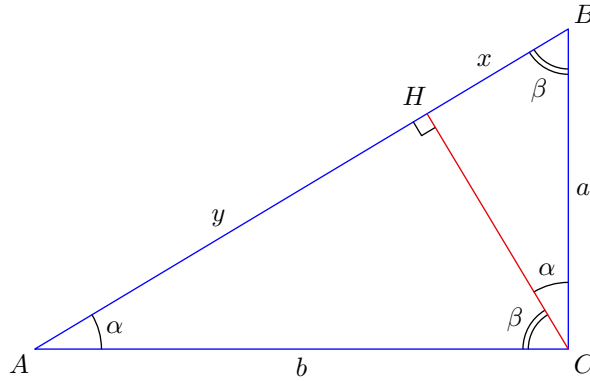


Рис. 3.

Отрезок  $BH = x$  есть проекция катета  $a$  на гипотенузу. Отрезок  $AH = y$  есть проекция катета  $b$  на гипотенузу. Очевидно, что  $x + y = c$ .

Пусть  $\angle A = \alpha$  и  $\angle B = \beta$  — острые углы треугольника  $ABC$ . Угол  $\beta$  является также острым углом треугольника  $BCH$ ; ясно поэтому, что  $\angle BCH = \alpha$ . Точно так же  $\angle ACH = \beta$ .

Из треугольников  $BCH$  и  $ABC$  имеем соответственно:

$$\cos \beta = \frac{x}{a}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c},$$

откуда

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{c},$$

или

$$a^2 = cx. \quad (1)$$

Записав это в виде  $a = \sqrt{cx}$ , мы видим, что *катет есть среднее геометрическое гипотенузы и своей проекции на гипотенузу*.

Точно такой же результат имеем и для другого катета:

$$b^2 = cy. \quad (2)$$

Складывая (1) и (2), получим:

$$a^2 + b^2 = cx + cy = c(x + y) = c \cdot c = c^2.$$

Теорема Пифагора доказана.

**ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА ПИФАГОРА.** Если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то такой треугольник является прямоугольным (третья сторона — гипотенуза).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть для сторон  $a$ ,  $b$ ,  $c$  некоторого треугольника  $\Delta$  выполнено равенство  $a^2 + b^2 = c^2$ . Рассмотрим прямоугольный треугольник  $\Delta_1$  с катетами  $a$  и  $b$ . По теореме Пифагора

его гипотенуза равна  $\sqrt{a^2 + b^2} = c$ . Значит, треугольники  $\Delta$  и  $\Delta_1$  равны по трём сторонам, и поэтому  $\Delta$  — прямоугольный треугольник с катетами  $a$ ,  $b$  и гипотенузой  $c$ . Теорема доказана.

Числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , связанные соотношением  $a^2 + b^2 = c^2$ , называются *пифагоровой тройкой*. Пифагоровых троек бесконечно много. Несколько пифагоровых троек встречаются в задачах весьма часто и их обязательно нужно знать.

1) Тройка 3, 4, 5 ( $3^2 + 4^2 = 5^2$ ). Прямоугольный треугольник с катетами 3, 4 и гипотенузой 5 называется *египетским*.

2) Тройки, кратные тройке 3, 4, 5:

- 6, 8, 10;
- 9, 12, 15;
- 12, 16, 20;
- 15, 20, 25 и так далее.

3) Другие важные тройки:

- 5, 12, 13 ( $5^2 + 12^2 = 13^2$ );
- 7, 24, 25;
- 8, 15, 17;
- 9, 40, 41.

## Синус, тангенс, котангенс

Снова рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами  $a$ ,  $b$  и гипотенузой  $c$  (рис. 4).

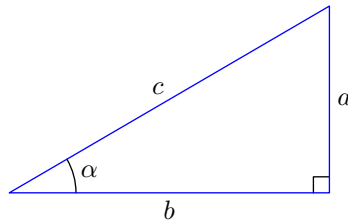


Рис. 4.

*Синус* угла  $\alpha$  — это отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}.$$

*Косинус* угла  $\alpha$  — это, как мы уже знаем, отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

*Тангенс* угла  $\alpha$  — это отношение противолежащего катета к прилежащему:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

*Котангенс* угла  $\alpha$  — это отношение прилежащего катета к противолежащему:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

*Основное тригонометрическое тождество:*

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Основное тригонометрическое тождество доказывается очень просто с помощью теоремы Пифагора. Вы это сделаете самостоятельно в соответствующей задаче к данному листку.

Из основного тригонометрического тождества мы видим, что синус острого угла однозначно вычисляется через его косинус:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}.$$

Следовательно, синус угла также определён корректно — значение синуса определяется только величиной угла и не зависит от выбранного прямоугольного треугольника.

Далее, для тангенса имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Аналогично,

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Эти равенства показывают, что тангенс и котангенс также зависят лишь от величины угла, но не от конкретного прямоугольного треугольника.

## Задачи

1. Найдите диагональ квадрата со стороной  $a$ .

2^2

2. В прямоугольном треугольнике с углом  $60^\circ$  гипотенуза равна 2. Найдите катеты.

2 и 1

3. Вычислите синус, косинус, тангенс и котангенс углов  $45^\circ$ ,  $30^\circ$  и  $60^\circ$ .

4. С помощью теоремы Пифагора докажите основное тригонометрическое тождество.

5. В прямоугольном треугольнике с острым углом  $\alpha$  гипотенуза равна  $c$ . Найдите катеты.

c sin α и c cos α

6. Найдите высоту прямоугольного треугольника, проведённую из вершины прямого угла, если гипотенуза равна 8, а один из острых углов равен  $60^\circ$ .

2√3

7. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  угол при вершине  $B$  равен  $120^\circ$ , а основание равно 6. Найдите боковую сторону.

3√3

8. Найдите диагональ прямоугольника со сторонами 5 и 12.

13

9. Основания прямоугольной трапеции равны 6 и 8. Один из углов при меньшем основании равен  $120^\circ$ . Найдите диагонали трапеции.

4√19 и 2√19

10. Найдите высоту прямоугольного треугольника, проведённую из вершины прямого угла, если проекции катетов на гипотенузу равны  $x$  и  $y$ .

$$\sqrt{xy}$$

11. Найдите катеты, если их проекции на гипотенузу равны  $x$  и  $y$ .

$$(\sqrt{h^2 + x^2})\sqrt{h^2 + y^2}, (\sqrt{h^2 + x^2})x\sqrt{h^2 + y^2}$$

12. Высота параллелограмма, проведённая из вершины тупого угла, равна  $h$  и делит сторону пополам. Острый угол параллелограмма равен  $30^\circ$ . Найдите диагонали параллелограмма.

$$2h\sqrt{2} \text{ и } 2h\sqrt{7}$$

13. Диагональ  $BD$  параллелограмма  $ABCD$  перпендикулярна стороне  $AB$ . Высота  $BM$  параллелограмма делит сторону  $AD$  на отрезки  $DM = 9$  и  $AM = 4$ . Найдите стороны и диагонали параллелограмма.

$$13, 2\sqrt{13}, 3\sqrt{13}, 5\sqrt{13}$$

14. Найдите расстояние от центра окружности радиуса 10 до хорды длиной 12.

$$8$$

15. Точка  $M$  находится на расстоянии 26 от центра окружности радиуса 10. Прямая  $MA$  касается окружности в точке  $A$ . Найдите длину отрезка  $MA$ .

$$24$$

16. Прямые, касающиеся в точках  $A$  и  $B$  окружности с центром  $O$ , пересекаются в точке  $M$ . Найдите хорду  $AB$ , если отрезок  $MO$  делится ею на отрезки 2 и 18.

$$12$$

17. Найдите сторону квадрата, вписанного в окружность диаметра 14.

$$7\sqrt{2}$$

18. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а проекция второго катета на гипотенузу равна 16. Найдите гипотенузу и второй катет.

$$25 \text{ и } 20$$

19. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна 5 и делит прямой угол в отношении 1 : 2. Найдите стороны треугольника.

$$5, 5\sqrt{3}, 10$$

20. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 и 16. Найдите медиану, проведённую к гипотенузе.

$$10$$

21. Найдите высоту трапеции со сторонами 5, 5, 5, 13.

$$3$$

22. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 13, основание равно 10. Найдите высоту треугольника, проведённую к основанию.

21

23. Дан равносторонний треугольник со стороной  $a$ . Найдите его высоту, а также радиусы вписанной и описанной окружностей.

$$\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{\sqrt{3}}$$

24. Вершина  $M$  правильного треугольника  $ABM$  со стороной  $a$  расположена на стороне  $CD$  прямоугольника  $ABCD$ . Найдите диагональ этого прямоугольника.

$$\frac{a}{\sqrt{3}}$$

25. Стороны треугольника равны  $a$  и  $b$ . К этим сторонам проведены высоты  $h_a$  и  $h_b$  соответственно. Докажите, что  $ah_a = bh_b$ .

26. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.

$$\frac{12}{5}$$

27. Основание равнобедренного треугольника равно  $a$ , боковая сторона равна  $b$ . Найдите высоту, проведённую к боковой стороне.

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

28. Сторона квадрата  $ABCD$  с центром  $O$  равна 6. Точка  $M$  расположена на стороне  $CD$ , причём  $CM : MD = 1 : 2$ . Найдите стороны треугольника  $AOM$ .

$$2\sqrt{2}, 2\sqrt{13}, 10$$

29. В треугольнике со сторонами 13, 14, 15 найдите высоту, проведённую к большей стороне.

$$\frac{96}{13}$$

30. Найдите высоту трапеции с основаниями 4, 14 и боковыми сторонами 6, 8.

$$\frac{15}{2}$$

31. Одно основание прямоугольной трапеции вдвое больше другого, а боковые стороны равны 4 и 5. Найдите диагонали трапеции.

$$5\sqrt{13} \text{ и } 9$$

32. В прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что одна из его сторон находится на гипотенузе. Боковые отрезки гипотенузы равны  $p$  и  $q$ . Найдите сторону квадрата.

$$\sqrt{pq}$$

33. В прямоугольный треугольник с углом в  $60^\circ$  вписан ромб со стороной 6 так, что угол  $60^\circ$  у них общий, а остальные вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найдите стороны треугольника.

$$81 \sqrt[3]{6} \sqrt[3]{6}$$

34. Две вершины квадрата лежат на основании равнобедренного треугольника, а две другие — на его боковых сторонах. Найдите сторону квадрата, если основание треугольника равно  $a$ , а угол при основании равен  $30^\circ$ .

$$\frac{11}{(1-\sqrt[3]{2})^2}$$

35. Найдите диагональ и боковую сторону равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12, если центр описанной вокруг неё окружности лежит на большем основании.

$$\sqrt[4]{8} \text{ и } \sqrt[5]{4}$$

36. Хорда  $AC$  окружности радиуса  $R$  образует с диаметром  $AB$  угол  $\alpha$ . Найдите расстояние от точки  $C$  до диаметра  $AB$ .

$$2R \sin \alpha \cos \alpha$$

37. Диагональ равнобедренной трапеции равна  $d$ , средняя линия равна  $m$ . Найдите высоту трапеции.

$$\sqrt[3]{m^3 - d^3}$$

38. Продолжения боковых сторон трапеции пересекаются под прямым углом. Большая боковая сторона равна 8, а разность оснований равна 10. Найдите меньшую боковую сторону.

$$9$$

39. Радиус окружности, вписанной в ромб, равен  $r$ , а острый угол ромба равен  $\alpha$ . Найдите сторону ромба.

$$\frac{2r}{\sin \alpha}$$

40. Отрезок, соединяющий центры двух пересекающихся окружностей, делится их общей хордой на отрезки 5 и 2. Найдите общую хорду, если известно, что радиус одной окружности вдвое больше радиуса другой.

$$\sqrt[3]{2}$$

41. Из точки  $M$  проведены касательные  $MA$  и  $MB$  к окружности с центром  $O$  ( $A$  и  $B$  — точки касания). Найдите радиус окружности, если  $\angle AMB = \alpha$  и  $AB = a$ .

$$\frac{\frac{a}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2}$$

42. Найдите основание равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна  $a$ , а высота, проведённая к основанию, равна отрезку, соединяющему середину основания с серединой боковой стороны.

$$\sqrt[3]{a}$$

43. Сторона треугольника равна 2, а прилежащие к ней углы равны  $30^\circ$  и  $45^\circ$ . Найдите остальные стороны треугольника.

$$\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{2} \text{ и } \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{2}$$

44. Косинус угла при основании равнобедренного треугольника равен  $\frac{3}{5}$ , а высота, опущенная на основание, равна  $h$ . Найдите высоту, опущенную на боковую сторону.

$$\frac{5}{4h}$$

45. Вершины  $M$  и  $N$  равностороннего треугольника  $BMN$  лежат соответственно на сторонах  $AD$  и  $CD$  квадрата  $ABCD$  со стороной  $a$ . Найдите  $MN$ .

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}\right) a$$

46. Радиус окружности, описанной вокруг равнобедренного треугольника, равен  $R$ . Угол при основании равен  $\alpha$ . Найдите стороны треугольника.

$$2R \sin \alpha, 4R \sin \alpha \cos \alpha$$

47. Вычислите  $\sin 15^\circ$ .

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2} \sqrt{2}}{2}$$

48. Медианы, проведённые к катетам прямоугольного треугольника, равны  $a$  и  $b$ . Найдите гипотенузу.

$$\frac{5}{2} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

49. Две стороны треугольника равны  $a$  и  $b$ . Медианы, проведённые к этим сторонам, перпендикулярны. Найдите третью сторону треугольника.

$$\sqrt{\frac{5}{2} \sqrt{a^2 + b^2}}$$

50. В прямоугольный треугольник с гипотенузой  $a$  и острым углом  $30^\circ$  вписан прямоугольник, одна сторона которого вдвое больше другой. Большая сторона прямоугольника находится на гипотенузе, а противоположные ей вершины — на катетах. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) a$$

51. На катете  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу  $AB$  в точке  $K$ . Найдите  $CK$ , если  $BC = a$  и  $AC = b$ .

$$\frac{a^2 + b^2}{2ab}$$

52. На боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре построена окружность, делящая вторую боковую сторону на отрезки  $m$  и  $n$ . Найдите основание треугольника.

$$(u + m) \sqrt{2} \text{ или } (u + m) \sqrt{2}$$

53. На катете  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу  $AB$  в точке  $D$  так, что  $AD : DB = 1 : 3$ . Высота, опущенная на гипотенузу, равна 3. Найдите катет  $BC$ .

9

54. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  проведена высота из вершины  $C$  прямого угла. На этой высоте как на диаметре построена окружность. Известно, что эта окружность высекает на катетах отрезки, равные 12 и 18. Найдите катеты треугольника  $ABC$ .

68 и 92

55. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна  $a$  и образует угол  $\alpha$  с медианой, проведённой из той же вершины. Найдите катеты треугольника.

$$\frac{a \cos \alpha}{(a \sin \alpha \pm 1) \sqrt{a}}$$

56. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12. Найдите катеты треугольника.

15 и 8

57. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом основании. Найдите все стороны трапеции, если её высота равна 12, а биссектрисы равны 13 и 15.

14, 12, 5, 29, 4, 16, 9

58. Диагональ  $AC$  равнобедренной трапеции  $ABCD$  и образует с большим основанием  $AD$  и боковой стороной  $AB$  углы  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно. Найдите основания трапеции.

$$((g + a) \sin \alpha \pm a \cos \alpha)$$

59. Найдите диагонали трапеции со сторонами 1, 1, 1, 2.

$$\sqrt{5}$$

60. Основания трапеции равны 3 и 5, одна из диагоналей перпендикулярна боковой стороне, а другая делит пополам угол при большем основании. Найдите высоту трапеции.

$$\frac{5}{12}$$

61. Боковая сторона  $AD$  и основание  $CD$  трапеции  $ABCD$  равны  $a$ , основание  $AB$  равно  $2a$ , а диагональ  $AC$  равна  $b$ . Найдите боковую сторону  $BC$ .

$$\sqrt{b^2 - a^2}$$

62. Катеты прямоугольного треугольника равны 21 и 28. Окружность с центром на гипотенузе касается обоих катетов. Найдите радиус окружности.

12

63. Через середину гипотенузы прямоугольного треугольника проведён к ней перпендикуляр. Отрезок этого перпендикуляра, заключённый внутри треугольника, равен  $c$ , а отрезок, заключённый между одним катетом и продолжением другого, равен  $3c$ . Найдите гипотенузу.

$$4c$$

64. Окружность, вписанная в трапецию, делит её боковую сторону на отрезки  $p$  и  $q$ . Найдите радиус окружности.

$$\frac{bd}{p+q}$$

65. Окружность радиуса  $R$  вписана в прямоугольную трапецию, меньшее основание которой равно  $4R/3$ . Найдите остальные стороны трапеции.

$$2R, 10R/3, 4R$$

66. Окружности радиусов  $R$  и  $r$  касаются внешним образом. Найдите длину отрезка их общей касательной, заключённого между точками касания.

$$2\sqrt{Rr}$$

67. Даны окружности радиусов  $R$  и  $r$  ( $R > r$ ). Расстояние между центрами этих окружностей равно  $a$  ( $a > R + r$ ). Найдите отрезки общих внешних и внутренних касательных, заключённые между точками касания.

$$\frac{a^2 - (R - r)^2}{2a} \text{ и } \frac{a^2 - (R + r)^2}{2a}$$

68. Окружности радиусов  $R$  и  $r$  ( $R > r$ ) касаются внешним образом в точке  $K$ . К ним проведены две общие внешние касательные. Их точки касания с меньшей окружностью —  $A$  и  $D$ , с большей —  $B$  и  $C$  соответственно. а) Найдите отрезок  $MN$  общей внутренней касательной, заключённый между внешними касательными. б) Докажите, что углы  $AKB$  и  $O_1MO_2$  прямые ( $O_1$  и  $O_2$  — центры окружностей). в) Найдите радиусы окружностей, касающихся обеих данных окружностей и их общей внешней касательной.

$$\frac{2\sqrt{Rr}}{R+r} \text{ и } \frac{2\sqrt{Rr}}{R-r}$$

69. В трапеции  $ABCD$  меньшая диагональ  $BD$  перпендикулярна основаниям  $AD$  и  $BC$ , сумма острых углов  $A$  и  $C$  равна  $90^\circ$ . Основания  $AD = a$ ,  $BC = b$ . Найдите боковые стороны трапеции.

$$\frac{(a+b)^2}{4}$$

70. Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны  $30^\circ$  и  $60^\circ$ . Найдите высоту трапеции.

$$\frac{3}{\sqrt{3}}$$

71. Стороны параллелограмма равны  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ), угол между ними равен  $\alpha$ . Найдите стороны и диагонали четырёхугольника, образованного пересечениями биссектрис внутренних углов параллелограмма.

$$q - p, q - p, \frac{q}{\sin \alpha}, \frac{q}{\sin \alpha}$$

72. Вне прямоугольного треугольника  $ABC$  на его катетах  $AC$  и  $BC$  построены квадраты  $ACDE$  и  $BCFG$ . Продолжение медианы  $CM$  треугольника  $ABC$  пересекает прямую  $DF$  в точке  $N$ . Катеты равны 1 и 4. Найдите  $CN$ .

$$\frac{5}{4}$$

73. Основание  $CD$ , диагональ  $BD$  и боковая сторона  $AD$  трапеции  $ABCD$  равны  $p$ . Боковая сторона  $BC$  равна  $q$ . Найдите диагональ  $AC$ .

$$\frac{p^2 - q^2}{p}$$

74. Хорды  $AB$  и  $CD$  окружности радиуса  $R$  пересекаются под прямым углом. Найдите  $BD$ , если  $AC = a$ .

$$\frac{a^2}{2R}$$

75. На гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами  $a$  и  $b$  во внешнюю сторону построен квадрат. Найдите расстояние от вершины прямого угла треугольника до центра квадрата.

$$\frac{a+b}{2}$$

76. Высоты треугольника равны 12, 15 и 20. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

77. В круге проведены диаметры  $AB$  и  $CD$ .  $M$  — некоторая точка. Известно, что  $AM = 15$ ,  $BM = 20$  и  $CM = 24$ . Найдите  $DM$ .

$$1$$

78. Катет прямоугольного треугольника равен 2, противолежащий ему угол равен  $30^\circ$ . Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники, на которые данный треугольник делится медианой, проведённой из вершины прямого угла.

$$\frac{1}{\sqrt{3}}$$

79. В прямоугольном треугольнике с углом  $30^\circ$  радиус вписанной окружности равен  $r$ . Найдите расстояние между центром вписанной окружности и центром внеписанной окружности, касающейся меньшего катета. (Окружность называется *внеписанной*, если она касается стороны треугольника и продолжений двух других сторон.)

$$2r$$

80. Найдите радиус вписанной окружности и радиусы трёх внеписанных окружностей треугольника со сторонами: а) 5, 12, 13; б) 10, 10, 12.

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}, \frac{15}{2}$$

81. В треугольнике  $PQR$  угол  $QRP$  равен  $60^\circ$ . Окружность радиуса 2 вписана в этот треугольник, а внеписанная окружность радиуса 3 касается продолжений сторон  $PQ$  и  $PR$ . Найдите расстояние между точками касания этих окружностей со стороной  $QR$ .

$$\frac{1}{2}$$

82. Радиус окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , равен  $\sqrt{3} - 1$ . Радиус внеписанной окружности, касающейся стороны  $BC$ , равен  $\sqrt{3} + 1$ . Угол  $A$  треугольника равен  $60^\circ$ . Найдите углы  $B$  и  $C$ .

$$30^\circ \text{ и } 90^\circ$$

83. Дана окружность радиуса 2 с центром  $O$ . Из конца отрезка  $OA$ , пересекающегося с окружностью в точке  $M$ , проведена касательная  $AK$  к окружности ( $K$  — точка касания). Угол  $OAK$  равен  $60^\circ$ . Найдите радиус окружности, касающейся отрезков  $AK$ ,  $AM$  и дуги  $MK$ .

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt[4]{z}} - z$$

84. К двум окружностям, касающимся внешним образом в точке  $C$ , проведена общая внешняя касательная,  $A$  и  $B$  — точки касания. Найдите радиусы окружностей, если  $AC = 6$ ,  $BC = 8$ .

$$\frac{\varepsilon}{0z} + \frac{v}{\sqrt[4]{z}}$$

85. Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность радиуса  $R$ . Его диагонали перпендикулярны и пересекаются в точке  $P$ . Найдите  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$  и  $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$ .

$$z^4 v^7 \text{ и } z^8 v^8$$

86. Три окружности радиусов 1, 2 и 3 касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через точки касания данных окружностей.

$$1$$

87. Прямоугольный треугольник  $ABC$  ( $\angle A = 90^\circ$ ) и два квадрата  $BEFC$  и  $AMNB$  расположены так, что точки  $A$  и  $E$  лежат по разные стороны от прямой  $BC$ , а точки  $C$  и  $M$  — по разные стороны от прямой  $AB$ . Найдите расстояние между центрами квадратов, если  $AB = b$ ,  $AC = a$ .

$$\sqrt{z^q + q^v + \frac{z}{z^v}}$$

88. На высотах  $BB_1$  и  $CC_1$  остроугольного треугольника  $ABC$  взяты точки  $B_2$  и  $C_2$  так, что  $\angle AB_2C = \angle AC_2B = 90^\circ$ . Докажите, что  $AB_2 = AC_2$ .